

# ANÁLISE DE GRANULOMETRIA EM IMAGENS BASEADA EM TRANSFORMADA WAVELETS

ELISÂNGELA F. OLIVEIRA<sup>1</sup>, ANDREA G. C. BIANCHI<sup>2</sup>, LUIZ S. MARTINS-FILHO<sup>3</sup>, ROMUEL F. MACHADO<sup>4</sup>

<sup>1</sup>*Programa de Pós-Graduação em Eng. os Materiais - REDEMAT, Universidade Federal de Ouro Preto  
Campus Morro do Cruzeiro, 35400-000 Ouro Preto, MG, Brasil*

<sup>2,4</sup>*Depto. de Física, Inst. de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto  
Campus Morro do Cruzeiro, 35400-000 Ouro Preto, MG, Brasil*

<sup>3</sup>*Depto. de Computação, Inst. de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto  
Campus Morro do Cruzeiro, 35400-000 Ouro Preto, MG, Brasil*

*E-mails: elisprod@yahoo.com.br, andrea@iceb.ufop.br, luizm@iceb.ufop.br,  
romuelm@iceb.ufop.br*

**Abstract**— This article presents a methodology for the granulometry analysis of images based on modeling space frequencies energy, using the *Wavelets* transform. A brief review of *Wavelets* transform tool is presented, and the proposed methodology is detailed. The presented results were obtained using numerically and experimentally simulated images. These results show the relevant correlation between the energy of the *Wavelets* coefficients and the distribution of the analyzed objects sizes.

**Keywords**— Computer vision, Image processing, Granulometry, *Wavelet*, Granular materials.

**Resumo**— Este artigo apresenta uma metodologia para a análise granulométrica de imagens baseada em um modelo de energia de frequências espaciais via a utilização das transformadas *Wavelets*. Uma breve descrição da ferramenta Transformada *Wavelet* é apresentada e a metodologia proposta é detalhada. Os resultados apresentados foram obtidos utilizando imagens simuladas computacional e experimentalmente, e revelam uma forte correlação entre a energia dos coeficientes *wavelets* e a distribuição de tamanhos dos objetos analisados.

**Palavras-chave**— Visão computacional, Processamento de imagens, Análise granulométrica, *Wavelet*, Materiais granulares.

## 1 Introdução

A área de visão computacional é extremamente ampla e inclui diversas aplicações, que vão desde a automação industrial (e.g. inspeção visual), o sensoriamento remoto, até a análise de imagens de microscopia voltados à biologia. Dentre as aplicações, o estudo das estruturas presentes em materiais vêm despertando um grande interesse, na medida que possibilita a estimação objetiva e precisa de suas estruturas. Esse processo caracteriza-se como uma área da visão computacional onde sistemas são construídos com o objetivo de identificar e/ou classificar os objetos de uma cena.

A partir da década de 80 os processos de inspeção visual utilizando processamento de imagens começaram a ser empregados na área de mineração, em atividades como o monitoramento das dimensões do minério conduzido em correias transportadoras, a identificação de pedras preciosas, a análise de granulometria, a inspeção das etapas de britagem, a classificação até o beneficiamento do material. De tal modo que a automação dos sistemas permita otimizar o processo de produção.

Dentro deste contexto, os métodos tradicionalmente utilizados para o estudo da granulometria baseiam-se em técnicas de

segmentação [Castleman(1996)], processo que particiona o domínio espacial de uma imagem em subconjuntos mutuamente exclusivos denominados de regiões, sendo que cada uma delas é uniforme e homogênea com respeito a algumas características (*features*), como, por exemplo, cor e textura, e cujos valores diferem de uma região para outra [Castleman(1996)]. Embora amplamente empregado no processamento de imagens, a segmentação possui certas limitações na análise de materiais naturais ou beneficiados, principalmente por se tratar de materiais sobrepostos, fato que dificulta a identificação das regiões. Ainda como limitação, pode-se destacar: a presença de ruídos na imagem, a iluminação irregular, a influência da coloração, a textura, dentre outras.

Além disto, a segmentação consegue validar um número reduzido de objetos o que pode descaracterizar ou pelo menos diminuir a amostragem, e como consequência gerar a propagação de erros no modelo. Novamente, tais influências tornam-se mais significativas quando se trata do estudo de materiais em pilhas ou sobre transportadores, situação de sobreposição de objetos. O resultado então é a identificação de partes do objeto, demandando operações complicadas para a validação e/ou correção destes por meio de algum tipo de inferência estatística.

Este trabalho apresenta um método global de análise de imagens voltada a granulometria que não se baseia na individualização de objetos, mas sim na transformação da informação contida na imagem para o domínio das frequências espaciais, descartando o processo de segmentação [Oliveira(2007)]. O objetivo principal é tratar a análise granulométrica em imagens digitais utilizando os padrões de energia das frequências espaciais obtidas pela transformada *Wavelet* [Burrus(1998), Kaiser(1994), Mallat(1999), Moretin(1999)], atuando como uma ferramenta auxiliar no controle do processo industrial de monitoramento. Os resultados serão avaliados adotando como parâmetro estatístico a análise da correlação entre o padrão de frequências espaciais dos coeficientes de aproximação e detalhes da transformada *Wavelet*.

Nas Seções 2 e 3 é apresentada uma breve teoria sobre as transformadas *Wavelets*, o conceito de multiresolução (espaço-escala) e as abordagens baseadas em filtragens do sinal. Como complementação, a Seção 4 apresenta o modelo de *Wavelets* desenvolvido para o estudo da granulometria e as imagens simuladas numericamente e experimentalmente. A Seção 5 apresenta as discussões relacionadas aos resultados e seus respectivos procedimentos de análise. Finalizando, a Seção 6 apresenta os comentários e conclusões do estudo.

## 2 Transformada *Wavelets*

As *wavelets* são funções definidas em um intervalo finito e de valor médio nulo, o que as caracterizam como pequenas ondas. Elas são geradas a partir de translações ( $b$ ) no espaço e escalonamentos (dilatações ou contrações) ( $a$ ) de uma única função  $\psi(t)$  denominada *wavelet* mãe, representada na Eq. (1).

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (1)$$

A função *wavelet* mãe não é específica, a recomendação da literatura é que a escolha da família a ser implementada se baseie na melhor caracterização do fenômeno: imagem ou sinal a ser analisado. As famílias freqüentemente empregadas para o processamento de sinais são as *wavelets* de Haar [Stollnitz(1995)], Daubechies [Daubechies (1992)] e Morlets [Antoine(1993)].

Em geral, uma *wavelet* é uma função, no domínio do tempo, que apresenta as seguintes propriedades [Kaiser(1994)]:

- é uma função finita e admissível, ou seja, oscila no tempo mas que possui média zero;
- é uma função regular, com propriedades de suavidade e continuidade nas derivadas;

- é uma função de suporte compacto, ou seja, localizada no espaço.

Tais características permitem aproximar uma função como a sobreposição de funções *wavelets* mãe, resultando em uma coleção de representações tempo-escala do sinal, todos com diferentes resoluções. Estas representações geram o que denominamos análise de multiresolução.

Supondo que a função  $\psi_{a,b}(t)$  apresente as características de uma *wavelet*, a Transformada *Wavelet* contínua de uma função  $f \in L^2(R)$  é definida pela convolução entre o sinal original e a função *wavelet*, Eq. (2). Sendo que  $\langle f, \psi_{a,b} \rangle$  representa o produto interno e \* denota o complexo conjugado.

$$W(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \quad (2)$$

A função *wavelet*  $\psi_{a,b}(t)$  pertence à intercessão de dois espaços  $L^1(R)$  e  $L^2(R)$ , de tal modo que a família de funções pode ser ortogonal ou não. O caso ortogonal define uma ‘base *wavelet*’ cuja principal vantagem é permitir a reconstrução perfeita do sinal a partir dos coeficientes da transformada direta [Daubechies(1992), Mallat(1999)], mesmo assim existem várias aplicações onde não se utiliza funções ortogonais [Daubechies(1992)].

A versão da Transformada *Wavelet* discreta possui diversas abordagens, a principal é dada pela discretização do processo de convolução e pode ser calculada via transformada rápida de Fourier [Mallat(1999)]. Por outro lado, outros métodos atuam restringindo a definição dos parâmetros de escalonamento e translação sobre valores discretos, isto é,  $a = a_0^j$  e  $b = kb_0 a_0^j$ , com  $j$  e  $k \in \mathbb{R}$  e  $a_0 > 1$  e  $b_0 > 1$  [Daubechies(1992)]. Um dos casos particulares mais comuns é obtido utilizando  $a_0 = 2$  e  $b_0 = 1$ , resultando na função *wavelet* apresentada na Eq. (3).

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k) \quad (3)$$

Nesta situação, diferentes valores de  $j$  correspondem a diferentes larguras de *wavelets*. Logo, é desejável que o parâmetro de translação  $b$  seja dependente de  $j$ , de tal modo que *wavelets* estreitas (frequências altas) são transladadas por meio de pequenos passos enquanto *wavelets* largas (frequências baixas) são transladadas por meio de passos maiores [Burrus(1998), Kaiser(1994)]. Nesta situação a Transformada *Wavelet* discreta é dada pela Eq. (4), onde  $n = 2^j$ .

$$d_{j,k} = \sum_{t=0}^{n-1} x_t \psi_{j,k}(t) \quad (4)$$

Se a função *wavelet* mãe possuir algumas relações de escala [Stollnitz(1995)], então sua discretização torna-se uma filtragem de fácil implementação e pouca complexidade computacional. Estas relações de escala dizem

respeito a sua análise multiresolução [Jawerth(1994)].

A análise multiresolução é uma estratégia de processamento de sinais onde é utilizado um conjunto de filtros discretos e especializados para calcular as bases *wavelets* ortonormais e discretas do sinal. Na prática, quando o sinal é analisado em escalas maiores, ou seja, adota-se uma menor resolução temporal, os detalhes não são considerados. Ao se realizar um zoom na imagem, a escala é reduzida e obtém-se um ganho na resolução [Jawerth(1994), Selmaoui(2004)].

A conceitualização matemática da análise de multiresolução compreende o estudo de uma seqüência crescente de subespaços fechados  $V_j$ , tal que  $j \in \mathbb{Z}$ , satisfaz algumas propriedades [Kaiser(1994), Mallat(1999)] e compõe um espaço de funções. Ou seja, sempre que uma coleção de subespaços fechados satisfaz as propriedades de multiresolução [Jawerth(1994), Kaiser(1994)], existe uma base ortonormal de *wavelets* ( $\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}$ ), tal que para todo sinal  $f \in L^2$  existe uma representação composta por **aproximações** (funções escala) e **detalhes** (funções *wavelets*) projetados no subespaço.

Na análise de multiresolução as funções detalhes descritas pelas *wavelets* são equivalentes a função apresentada na Eq. (3). As funções aproximações ou de escala  $\phi$ , originam-se de uma família ortogonal as *wavelets* e recebem a denominação de *wavelets* pai, Eq. (5).

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k) \quad (5)$$

A representação das aproximações de  $f$  são obtidas em diferentes níveis de resolução, de modo que o subespaço  $V_j$  seja constituído por funções de aproximação, sendo que a melhor aproximação é obtida considerando-se a projeção ortogonal de  $f$  sobre cada  $V_j$ . O fato que  $V_j \subset V_{j+1}$  significa que, ao passar de um nível de resolução  $j$  para o nível de resolução  $j+1$ , adicionamos detalhes à imagem e, conseqüentemente, aumentamos o nível de informação contida na mesma. A cada passo, o coeficiente de aproximação (cA) recebe uma influência menor das componentes de alta freqüência do sinal ou imagem. Enquanto isso, os coeficientes de detalhes (cD) consistem principalmente de altas freqüências ou ruídos.

O raciocínio oposto também é válido, ou seja, quando se aproxima  $f$  de níveis de resolução cada vez menores, perde-se informação [Mallat(1999)]. Considerando um sinal em uma dada resolução ( $j-1$ ), pode-se afirmar que as funções de escalonamento  $\phi(x)$  formam uma base para um conjunto de sinais. Neste contexto, o sinal acrescido dos detalhes são combinados em uma multiresolução com um nível de resolução mais fino  $j$ . Dessa forma, todos os conteúdos das aproximações e dos detalhes são

obtidos por meio de um processo sucessivo de operações de decimação, denominadas convoluções.

Nesse sentido, a análise multiresolução é responsável por promover a divisão do sinal original em escalas de resolução, processo denominado codificação em sub-bandas [Kaiser(1994)].

Para tal, deve-se considerar que na transformada *wavelet* discreta cada sinal  $x(t)$  pertencente ao espaço  $V_j$ , tal que  $V_j = V_{j+1} + W_{j-1}$ , pode ser expresso por meio das funções da base de cada um dos espaços, onde  $W_j$  é o complemento ortogonal do espaço  $V_j$ . De tal modo que a partir dos coeficientes gerados na primeira aproximação  $A_0(k)$  pertencentes à escala ( $j$ ), Eq. (6), são implementados os coeficientes  $A_j(k)$  e  $D_j(k)$  na escala ( $j-1$ ), processo denominado análise, Eq. (7).

$$x(t) = \sum_k cA_0(k) \phi_{j,k}(t) \quad (6)$$

$$x(t) = \sum_k cA_1(k) \phi_{j-1,k}(t) + \sum_k cD_1(k) \psi_{j-1,k}(t) \quad (7)$$

Esse processo compreende a decomposição do sinal em aproximação e detalhe através das sucessivas passagens do sinal pelos bancos de filtros. Desse modo, pode-se afirmar que a aproximação do sinal consiste em uma representação em baixa resolução do sinal original, contendo suas baixas freqüências, enquanto os detalhes correspondem à diferença entre duas sucessivas representações em baixa resolução do sinal original, expressando sua alta freqüência.

Alternativamente, o processo de reconstrução do sinal ocorre no sentido inverso ao da decomposição [Oliveira(2007)], pode se iniciar a partir dos coeficientes  $A_j(k)$  e  $D_j(k)$  na escala ( $j-1$ ) e produzir o  $A_0(k)$  na escala ( $j$ ). Tal operação denomina-se síntese.

### 3 Análise bidimensional usando wavelets

A aplicação da Transformada *Wavelet* a um sinal bidimensional utilizando filtragens é análoga ao processo unidimensional, ou seja, o sinal é transformado por meio de um banco de filtros passa-banda, um passa-baixo e outro passa-alto, dividindo-o em dois sinais iguais e menores.

Os filtros passa-baixo são conhecidos como filtros de suavização, possuem a característica de manter os mesmos coeficientes para a máscara de convolução independente da posição na imagem, conhecida como invariância à translação. Outra importante propriedade é a implementação dos filtros pela operação de convolução, de modo que a máscara caracteriza o tipo de filtro linear empregado. Como função, os filtros passa-baixas destacam-se por permitir a remoção de pequenos detalhes presentes na imagem e na atenuação dos ruídos.

Por outro lado, os filtros passa-alta têm por função o realce das componentes de altas freqüências da imagem, o que corresponde a uma acentuação das

bordas e outros detalhes finos da imagem [Stollnitz(1995)].

Na prática, a aplicação destes filtros em uma matriz é realizada pela iteração entre linhas e colunas da matriz de origem, tal que, a cada nível de iteração são geradas 4 sub-imagens que constituem os coeficientes *wavelets* [Stollnitz(1995)], uma imagem é referente aos coeficientes de aproximação, e as outras três representam os coeficientes detalhes, cada uma referente a uma orientação espacial (horizontal, vertical e diagonal).

A Figura 1 representa a decomposição dos coeficientes para a Transformada *Wavelet* bidimensional. A função de escala determina os coeficientes da aproximação, simbolizados por  $a_j$ , os coeficientes de detalhes são descritos por  $d^H$ ,  $d^V$  e  $d^D$ , e correspondem, respectivamente, aos coeficientes de detalhes horizontais, verticais e diagonais em seus respectivos níveis de resolução,  $j$ .

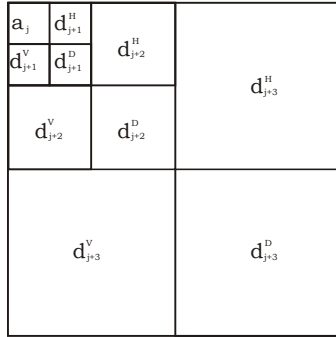


Figura 1. Decomposição dos coeficientes *wavelets* bidimensionais.

Uma questão relevante durante a aplicação da transformada *wavelet* é a escolha da função mais adequada para a análise do sinal. Como não existe uma receita única para este procedimento, a escolha é baseada em aspectos que melhor se adaptem a caracterização do sinal analisado.

Assim, a escolha da família *wavelet* que se revelou adequada ao presente estudo foi a família de Haar [Stollnitz(1995)], devido principalmente ao seu suporte compacto, à sua simplicidade na implementação, performance eficiente para detecção de alterações bruscas na imagem (bordas) e baixo custo computacional.

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, t \in [0,1) \\ 0, t \notin [0,1) \end{cases} \quad (8)$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, t \in [0,1/2) \\ -1, t \in [1/2,1) \\ 0, t \notin [0,1) \end{cases} \quad (9)$$

A função unidimensional de escala de Haar é definida de acordo com a Eq. (8), enquanto sua *wavelet* é dada pela função degrau definida na Eq. (9), cujas translações e dilatações geram uma base ortonormal em  $L^2$ .

A decomposição utilizando bases *wavelets* bidimensionais em imagens pode ser efetuada de dois modos diferentes: a decomposição padrão e a não padrão [Stollnitz(1995)]. A decomposição padrão é obtida aplicando a transformada *wavelet* unidimensional para todas as linhas, e posteriormente para as colunas, a construção desta base consiste em todos os possíveis produtos de tensores de uma função de base unidimensional.

Por outro lado, a decomposição não padrão alterna sua aplicação entre as linhas e as colunas, sua base bidimensional se baseia em funções separáveis para a escala e para as *wavelets* [Stollnitz(1995)]. De tal modo que a função escala é definida pela Eq. (10), e as *wavelets* pelas Eq. (11), (12) e (13), respectivamente para as orientações horizontal, vertical e diagonal.

$$\Phi_{k,l}^j = \phi \phi_{k,l}^j(x, y) = \phi_k^j(x) \phi_l^j(y) \quad (10)$$

$$\Psi^H(x, y) = \phi \psi_{k,l}^j(x, y) = \phi_k^j(x) \psi_l^j(y) \quad (11)$$

$$\Psi^V(x, y) = \psi \phi_{k,l}^j(x, y) = \psi_k^j(x) \phi_l^j(y) \quad (12)$$

$$\Psi^D(x, y) = \psi \psi_{k,l}^j(x, y) = \psi_k^j(x) \psi_l^j(y) \quad (13)$$

A transformada *Wavelet* de Haar das imagens foi calculada por meio das decomposições em frequências baixas e altas relativas aos coeficientes de aproximação e detalhe da imagem, respectivamente Eq. (10), e Eqs. (11), (12) e (13). Na Figura 2 são apresentados os resultados da transformada *Wavelet*, o quadrante superior esquerdo diz respeito aos coeficientes de aproximação ( $a_j$ ), enquanto os outros referem-se aos coeficientes detalhes horizontal ( $d^H$ ), vertical ( $d^V$ ) e diagonal ( $d^D$ ), respectivamente, quadrante superior direito, quadrante inferior esquerdo e quadrante inferior direito.

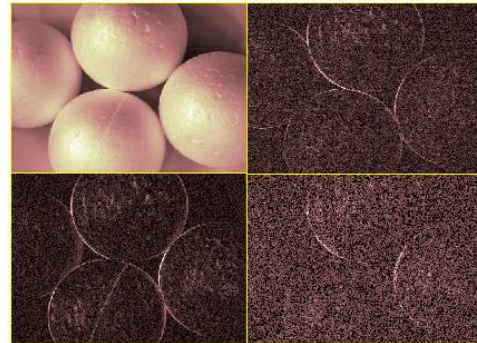


Figura 2. Decomposição via *Wavelet* de Haar, coeficientes de aproximação e coeficientes detalhes.

#### 4 Energia dos Coeficientes *Wavelets*

De acordo com a teoria de *Wavelets* descrita anteriormente, considera-se que os sinais podem ser representados tanto no domínio do tempo, onde a amplitude do sinal ou imagem é representada como uma função temporal; quanto no domínio da frequência, ou simplesmente, frequência espacial, onde o sinal é representado pela amplitude de cada frequência que o compõe.

A análise da granulometria é baseada na afirmação que a determinação do padrão de escalas espaciais e a sua respectiva variação podem estimar um padrão de tamanhos de objetos em uma imagem digital. A hipótese é fundamentada no fato que as frequências altas e baixas, e a distribuição da energia local, resultante da decomposição do sinal dada pela transformada *wavelet* discreta são suficientes para modelar o sistema de distribuição de granulometria. Neste sentido, observou-se uma forte relação entre tamanhos e energias associadas.

Dentro deste contexto, a modelagem do sistema de distribuição de granulometria é construída por meio do cálculo da energia do sinal transformado. A determinação das energias está fundamentada no teorema de Parseval que estabelece que “a energia contida no sinal é igual à soma das energias concentradas nos diferentes níveis de resolução da sua transformada *wavelet*” [Mallat(1999)]. Isso implica que a energia do sinal pode ser decomposta em termos dos seus coeficientes.

Desse modo, a energia dos coeficientes é calculada por meio da transformada *Wavelet* Haar bidimensional apresentada na Seção 3. São calculadas as energias referentes aos coeficientes de aproximação, Eq. (14), e de detalhes (detalhe vertical + detalhe horizontal + detalhe diagonal), Eq. (15). Conseqüentemente, é calculada a magnitude da taxa de energia, ou seja, razão entre a energia da aproximação e a energia dos detalhes, conforme explicitado na Eq. (16).

$$E_{detalhes} = \sqrt{(d_j^H)^2 + (d_j^V)^2 + (d_j^D)^2} \quad (14)$$

$$E_{aproximação} = \sqrt{(a_j)^2} \quad (15)$$

$$Taxa = \frac{E_{detalhes}}{E_{aproximação}} \quad (16)$$

#### 5 Resultados de Análise de Imagens

A metodologia apresentada no artigo foi testada considerando dois conjuntos de imagens: as imagens simuladas numericamente e as simuladas experimentalmente. As imagens computacionais são constituídas por esferas e foram geradas usando como parâmetro de entrada o valor do diâmetro, foram utilizados os diâmetros de 14 , 24, 35, 50, 75 e

95 pixels. Na Figura 3 é apresentada a imagem simulada considerando o diâmetro das esferas 24 pixels.

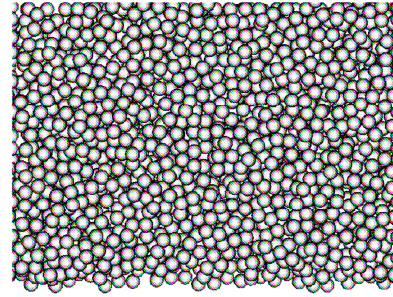


Figura 3. Imagem simulada com diâmetro das esferas em 24 pixels.

O segundo conjunto de imagens são experimentais e obtidas utilizando bolas de isopor de diferentes diâmetros. O ensaio foi realizado com iluminação constante sendo que as imagens foram capturadas via câmera CCD monocromática de alta resolução. Na Figura 4 é apresentada uma imagem utilizando bolas de diâmetro de 60mm. Além da imagem apresentada, foram adquiridas imagens considerando diâmetros de 15mm à 90mm.



Figura 4. Imagem experimental simulada com esferas de 60mm de diâmetro.

Os primeiros experimentos realizados são relativos as imagens com as esferas simuladas numericamente, de diferentes diâmetros. O gráfico da Figura 5 apresenta a variação do cálculo da taxa de energia, Eq (16), em função do diâmetro das esferas simuladas. Notamos o comportamento linear, uniforme e crescente entre a variação dos diâmetros e a taxa de energia dos coeficientes calculados para cada imagem. É interessante ressaltar que, embora cada imagem tenha sido geradas com um único diâmetro, o modelo mostrou-se bastante robusto, uma vez que o empilhamento das esferas não causou distorções no modelo.

Foram realizados os mesmos procedimentos com as imagens de bolas de isopor. Na Figura 6 é apresentado o gráfico da taxa de energia dos coeficientes em função do diâmetro das esferas. Nesta situação também é observada a tendência de aumento linear da taxa de energia dos coeficientes

com o aumento dos diâmetros, mantendo uma correlação superior a 95%.

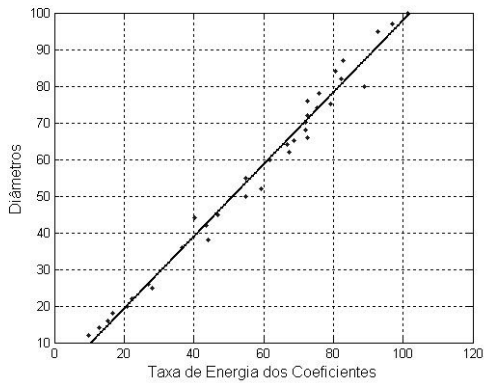


Figura 5. Gráfico da taxa de energia em função da variação dos diâmetros das esferas simuladas.

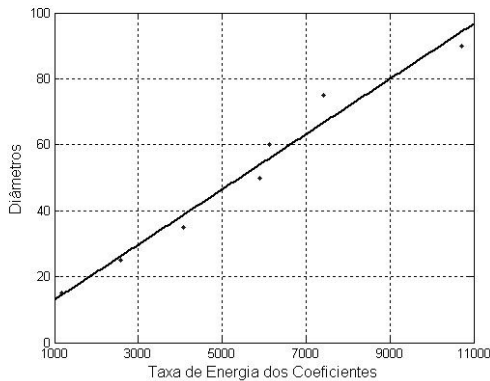


Figura 6. Gráfico da taxa de energia em função da variação dos diâmetros das esferas reais simuladas.

## 6 Conclusão

Os resultados apresentados no artigo sugerem a comprovação da hipótese a respeito da mensuração da variação da granulometria através da modelagem da taxa de energia dos coeficientes da imagem com o emprego da transformada *wavelet* de Haar. Esta modelagem se baseou na decomposição das frequências espaciais via o emprego de bancos de filtros: passa-alta e passa-baixa contendo, respectivamente, as altas e baixas frequências espaciais.

Além disso, a técnica mostrou-se robusta e capaz de gerar altas correlações em diferentes situações, tais como, de objetos com geometria diversa, sobreposição de objetos e invariância a rotação. De tal modo que a técnica destaca-se como uma ferramenta auxiliar na caracterização e classificação de partículas ou grãos, podendo atuar em conjunto com a abordagem convencional, segmentação, melhorando significativamente a performance dos resultados principalmente em situações de sobreposição de objetos.

Outra vantagem encontrada na abordagem diz respeito a facilidade de implementação, pois as transformadas *wavelets* de Haar encontram-se implementadas em diversos pacotes computacionais e também em hardware. Tais características indicam uma tendência para a sua aplicação prática nos processos industriais de monitoramento de dimensões de materiais em tempo real, como, por exemplo, extração de informações referentes à granulometria de materiais.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

## Referências Bibliográficas

- Antoine, J. P., Carette, P., Murenzi, R. E Piette, B. (1993). Image Analysis with Two Dimensional Continuous Wavelet Transform. *Sig. Proc.*, **31**:241-272.
- Burrus, C. S., Gopinath, R. A. e Guo, H. (1998). *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms. A Primer*. N.J., Prentice Hall.
- Castleman, K. R. (1996). *Digital Image Processing*, N.J., Prentice Hall.
- Daubechies, I. (1992). *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, 2<sup>nd</sup> Edition, Philadelphia.
- Jawerth, B. e Sweldens, W. (1994). An Overview of Wavelet Based Multiresolution Analyses, *SIAM Review*, 36(3):377-412.
- Kaiser, G. (1994). *A Friendly Guide to Wavelets*, Birkhauser, Boston.
- Mallat, S. (1999). *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academig Press, 2<sup>nd</sup> Edition, San Diego, Califórnia.
- Morettin, P. A. (1999). Ondas e Ondaletas: da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas. EDUSP, 1<sup>st</sup> Edition, São Paulo.
- Oliveira, E. F. (2007). *Estudo da Granulometria em Imagens via a Modelagem das Frequências Espaciais*, Dissertação de Mestrado da Rede Temática de Eng. De Mat.-UFOP, Ouro Preto.
- Stollnitz, E. J., DeRose, T. D. e Salesin, D. H.(1995). Wavelets for Computer Graphics: A primer, *IEEE Comp. Grap. and Appl.*, **15**(4):75-85.
- Selmaoui, N. (2004). Image Analysis for Core Geological Descriptions: Strada and Granulometry Detection. *IEEE Proc. of the 17th Int. Conf. on Patt. Recognition*.